

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗМІЩЕННЯ НАСІННЯ СОНЯШНИКУ У КОШИКУ

Е. Б. Алієв<sup>1,2</sup>, К. В. Ведмедєва<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Інститут олійних культур Національної академії аграрних наук України

<sup>2</sup> Дніпровський державний аграрно-економічний університет

Розроблена методика обробки фотозображення кошика соняшнику і визначення координат розміщення насіння в ньому. У результаті досліджень підтверджена відповідність розміщення насіння у кошику соняшнику послідовності Фібоначчі. Найбільш поширена кількість рядів насіння відповідає значенням 34 і 55. Висунута гіпотеза щодо лінійної залежності діаметра кошика соняшнику від загальної кількості насіння для відповідного значення кількості рядів. Провівши порівняння отриманих розподілів насінин у кошику із різними типами спіралей (спіраль Архімеда, евольвента, спіраль Ферма) розраховані значення коефіцієнта кореляції Пірсона для різних зразків (КП11А, КП11Б, 178а×238р4, 178а×238р2, 178а×238р1, 174д, 165Вр1). Встановлено, що найбільш високий коефіцієнт кореляції спостерігається для спіралі Ферма (середнє значення – 0,8).

**Ключові слова:** соняшник, кошик, насіння, розміщення, розподіл, спіраль, послідовність Фібоначчі, спіраль Ферма.

**Вступ.** Селекціонери, агрономи і агротехніки багато уваги приділяють діаметру кошику соняшнику і масі насіння зібраного з нього. Дослідники (Nosal et al. 2018, Kutishcheva et al. 2019, Polyakov et al. 2019, Polyakov et al. 2022) ці показники позиціонують, як елементи продуктивності, які мають прямий вплив на урожайність. Для отримання продукції соняшнику відповідної якості важливим виявляється також величина насіння, або відсоток виходу насіння відповідної фракції. Насіння кошику не однорідне. Для прогнозування врожаю потрібно встановити закономірності, які обумовлюють величину насіння у різних частинах кошику. Однак у відомих дослідженнях зазвичай не приділяється уваги розміщенню окремих насінин у кошику соняшнику. Математична модель розміщення насіння у кошику соняшнику дає змогу дослідити вплив їх конкуренції великонасінності між собою на загальну урожайність.

Звісно, ця ідея не є новою. Дослідження (Swinton et al. 2016) оцінює виникнення структури Фібоначчі в спіралях насіння кошику соняшнику. Це явище має конкуруючі біоматематичні пояснення, і основна передумова полягає в тому, що спостереження як структури Фібоначчі, так і не-Фібоначчі є інформативним для виклику таких моделей. У цих дослідженнях виявлені і більш складні структури Фібоначчі, про які раніше не повідомлялося.

У статті (Swinton 2004) наведені результати фундаментальних досліджень Тюрінга, які присвячені математичному опису морфогенезу квіток рослин. В статті стверджується, про появу чисел Фібоначчі в структурі розміщення насіння в кошику соняшнику.



\*Corresponding author

Copyright © The Author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License 4.0

(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Існуючі математичні моделі задовольняють тим, що можуть пояснити високі числа Фібоначчі на основі невеликої кількості правдоподібних припущень (Sadoc et al. 2012), хоча вони не так задовольняють вчених-експериментаторів. Незважаючи на все більш детальне генетичне, фізіологічне та біофізичне розуміння розташування органів рослин, сама розбірливість та спільність математичних пояснень ускладнюють генерацію та перевірку експериментальних гіпотез. Залишаються суперечки про доцільний вибір математичних моделей і про те, чи повинні вони бути центральними для нашого розуміння фізіологічного розвитку рослини. Хоча соняшники легко забезпечують найбільше число Фібоначчі у філотаксисі. Однак, існують обмеження в математичній моделі через відсутність систематичних експериментальних даних. Було проведено лише декілька великих емпіричних досліджень спіралей кошиків соняшнику (Schoute 1938, Weisse 1897). Нещодавно дослідження меншої вибірки кошику було проведено в (Swinton et al. 2016), де спеціально шукали приклади, відмінні від Фібоначчі, тоді як (Ryan et al.) вивчали розташування насіння більш уважно в невеликій вибірці. Вивчення закономірностей розташування дає змогу розробити програму для оцінки кількості насіння у кошику, а у майбутньому і їх якості, а у підсумку корисного врожаю. Але для отримання такого програмного інструменту потрібно провести багато етапів дослідження.

Метою нашого дослідження був розгляд різних генотипів та встановлення загальної закономірності розташування насіння у кошику, створення методики аналізу фотографій. На основі загальних закономірностей і програми можна буде в подальшому створити базу даних колекцій і переходити до розгляду методики з метою застосування у генетиці, фізіології та селекції соняшнику.

**Матеріали і методи досліджень.** Послідовність Фібоначчі – це послідовність чисел, в якій кожне число є сумою двох попередніх чисел. Зазвичай послідовність починається з двох чисел 0 і 1. Формально, перші два числа в послідовності Фібоначчі (позначені як  $F_0$  і  $F_1$ ) дорівнюють 0 і 1, а кожне наступне число (позначене як  $F_n$ ) обчислюється як сума двох попередніх чисел (Hudson Tiner 2004):

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (1)$$

Отже, послідовність Фібоначчі починається таким чином: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Де кожне наступне число є сумою двох попередніх чисел.

Послідовність Фібоначчі пов'язана зі золотим перетином. Золотий перетин – це математичне поняття, що виникає зі співвідношення між двома відношеннями, які мають спеціальну властивість. У випадку чисел Фібоначчі, якщо вибрати довільну пару сусідніх чисел і взяти їх відношення, то це відношення буде наближено рівно золотому перетину  $\phi$  (Arakelyan 2014):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi. \quad (2)$$

Золотий перетин має приблизне значення 1,61803. Ця властивість чисел Фібоначчі є результатом їх рекурсивного визначення.

Візерунок кошика соняшнику Тюрінга (Borda et al. 2020) із насінням, який використовує Національний музей математики в США (momath.org), містить багато рядів. Якщо рахувати ряди послідовним чином, завжди знайдеться

число Фібоначчі. На рисунку 1 наведено три найбільш природних способи знайти ряди в цьому візерунку. Кількість цих рядів складає 21, 34, 55, що відповідає послідовності Фібоначчі.

Для математичного опису розподілу насіння у вигляді спіралей розглянемо відомі:

– спіраль Архімеда:

$$\begin{cases} \rho = \frac{a}{2\pi}\varphi, \\ \varphi = n\varphi_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2\pi}n\varphi_0 \cos(n\varphi_0), \\ y = \frac{a}{2\pi}n\varphi_0 \sin(n\varphi_0), \end{cases} \quad (3)$$

де  $\rho$ ,  $\varphi$  – полярні координати,  $x$ ,  $y$  – декартові координати,  $a$  – крок спіралі,  $n$  – номер точки (насінини в кошику),  $\varphi_0$  – кут повороту точки (насінини у кошику);

– евольвента:

$$\begin{cases} x = r(\cos(n\varphi_0) + n\varphi_0 \sin(n\varphi_0)), \\ y = r(\sin(n\varphi_0) - n\varphi_0 \cos(n\varphi_0)), \end{cases} \quad (4)$$

де  $r$  – емпіричний коефіцієнт;

– спіраль Ферма:

$$\begin{cases} \rho^2 = d^2\varphi, \\ \varphi = n\varphi_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \text{sgn}(d)|d|(n\varphi_0)^{1/2} \cos(n\varphi_0), \\ y = \text{sgn}(d)|d|(n\varphi_0)^{1/2} \sin(n\varphi_0), \end{cases} \quad (5)$$

де  $d$  – емпіричний коефіцієнт.

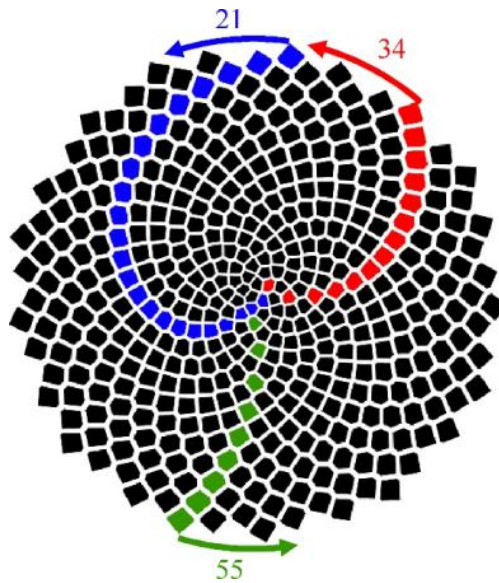


Рис. 1. Число Фібоначчі в кошику соняшнику Тюрінга

Побудуємо графіки функцій (3)–(5) для спіралей із золотим перетином, тобто  $\varphi_0 = 137,5^\circ = 2,399828$  рад, враховуючи дискретний характер змінної  $n \in [0; 300]$ . Рисунок 2 відображає різницю розміщення точок (насінин у кошику) для

різних функціональних спіралей. Різним кольором відмічені послідовності рядів, які виділяються для кожного типу спіралей.

Для визначення типу спіралі, який найбільш ефективно описує розподіл насіння в кошику, було проведено аналіз фотографій кошиків соняшнику різноманітних зразків ліній та гібридів селекції ІОК НААН.

Для отримання точок розміщення насіння в кошику, фотозображення піддавалось наступним перетворенням (Aliiev 2022) в програмному пакеті Wolfram Cloud (рис. 3).

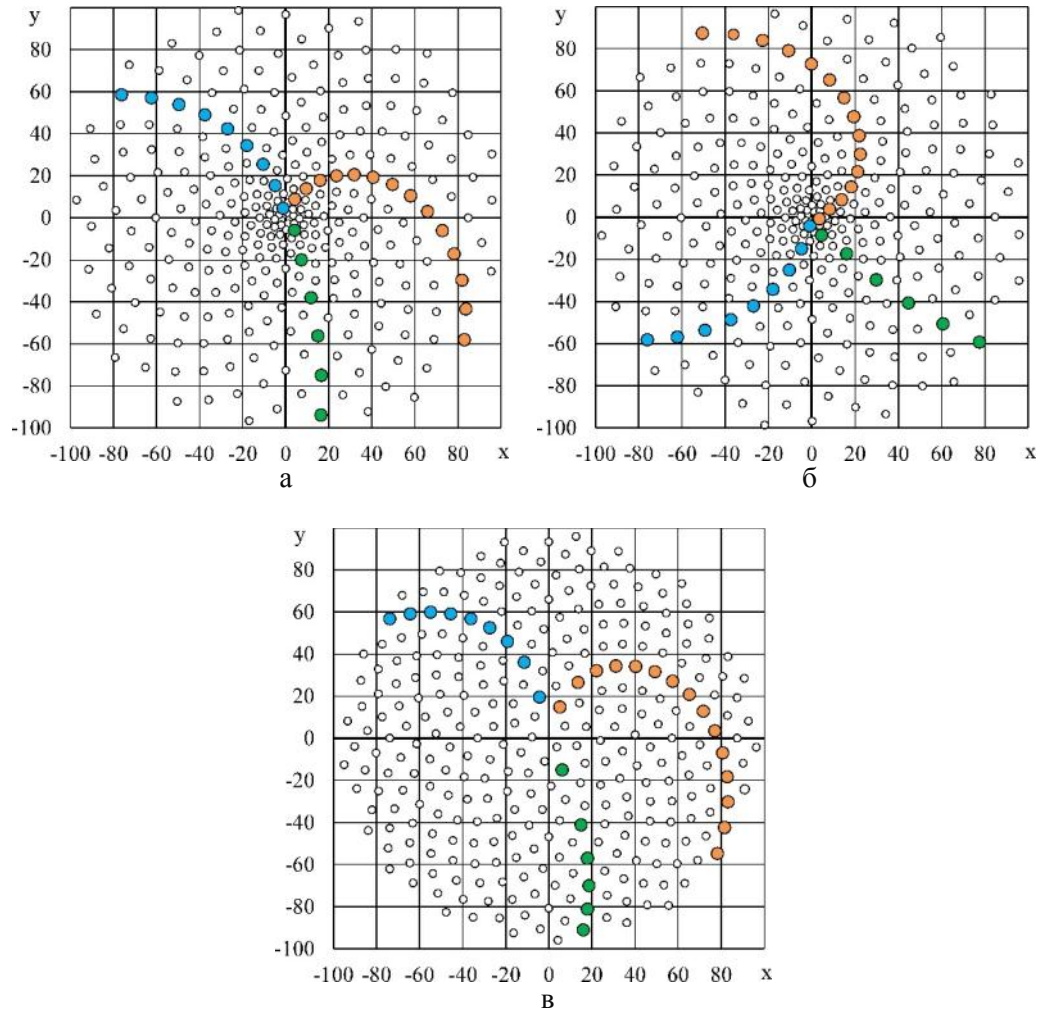


Рис. 2. Графічне представлення класичної спіралі Архімеда (а), евольвенти (б) і спіралі Ферма (в)

1. Вибір області аналізу з використанням функції ImageCrop.
2. Перетворення кольору зображення у відтінки сірого з використанням функції ColorConvert, накладання масок і заповнення пустих частин зображення чорним кольором з використанням функції ImagePad.

3. Морфологічна бінаризація зображення функцією MorphologicalBinarize, отримання координат білих піків зображення з використанням функції ComponentMeasurements, побудова їх на координатній площині (функція ListPlot).

4. З'єднання найближчих точок для формування спіралей і відображення їх на координатній площині.

5. Апроксимація отриманих рівнянь до одного з трьох типів спіралей (спіраль Архімеда, евольвента, спіраль Ферма) і розрахунок коефіцієнта кореляції Пірсона.

В якості зразків соняшнику були обрані наступні: КП11А, КП11Б, 178а×238р4, 178а×238р2, 178а×238р1, 174д, 165Вр1. Для кожного зразка досліджувалось 5 кошиків.

Діаметр кошика визначався також за фотозображенням з використанням відкаліброваного шаблону, за формулою

$$D_{sh} = 2\sqrt{kS_{sh} / \pi} \quad (6)$$

де  $D_{sh}$  – діаметр кошика, мм;  $S_{sh}$  – площа кошика на зображенні, піксель;  $k$  – коефіцієнт перерахунку площі,  $см^2/піксель$ .

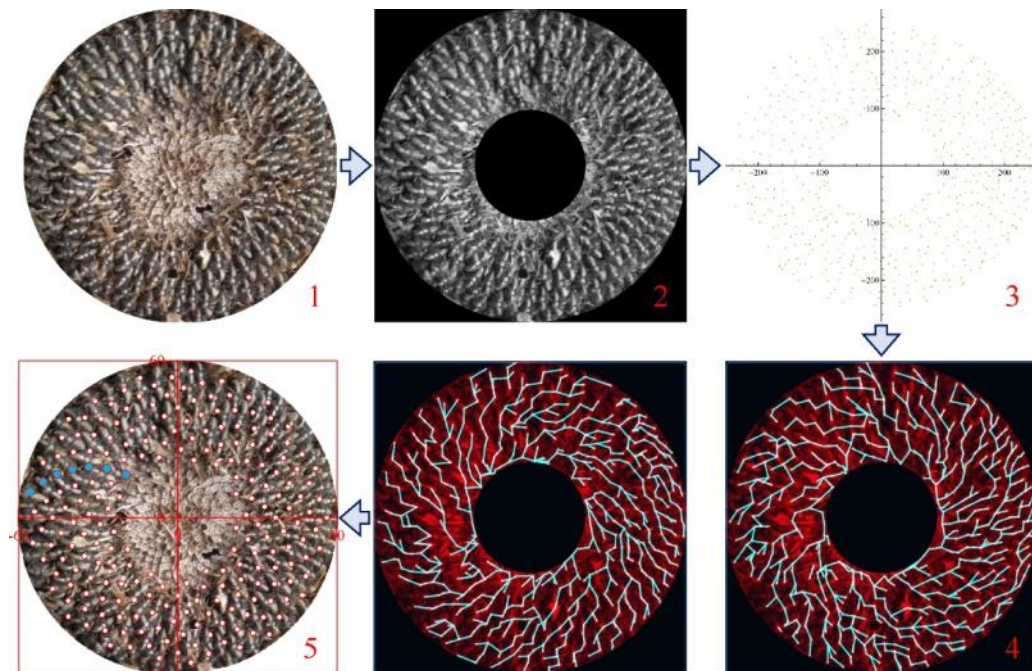


Рис. 3. Методика обробки фотозображення кошика соняшнику

Підрахунок насіння в ряду і їх вибір базувався на візуальному спостереженні.

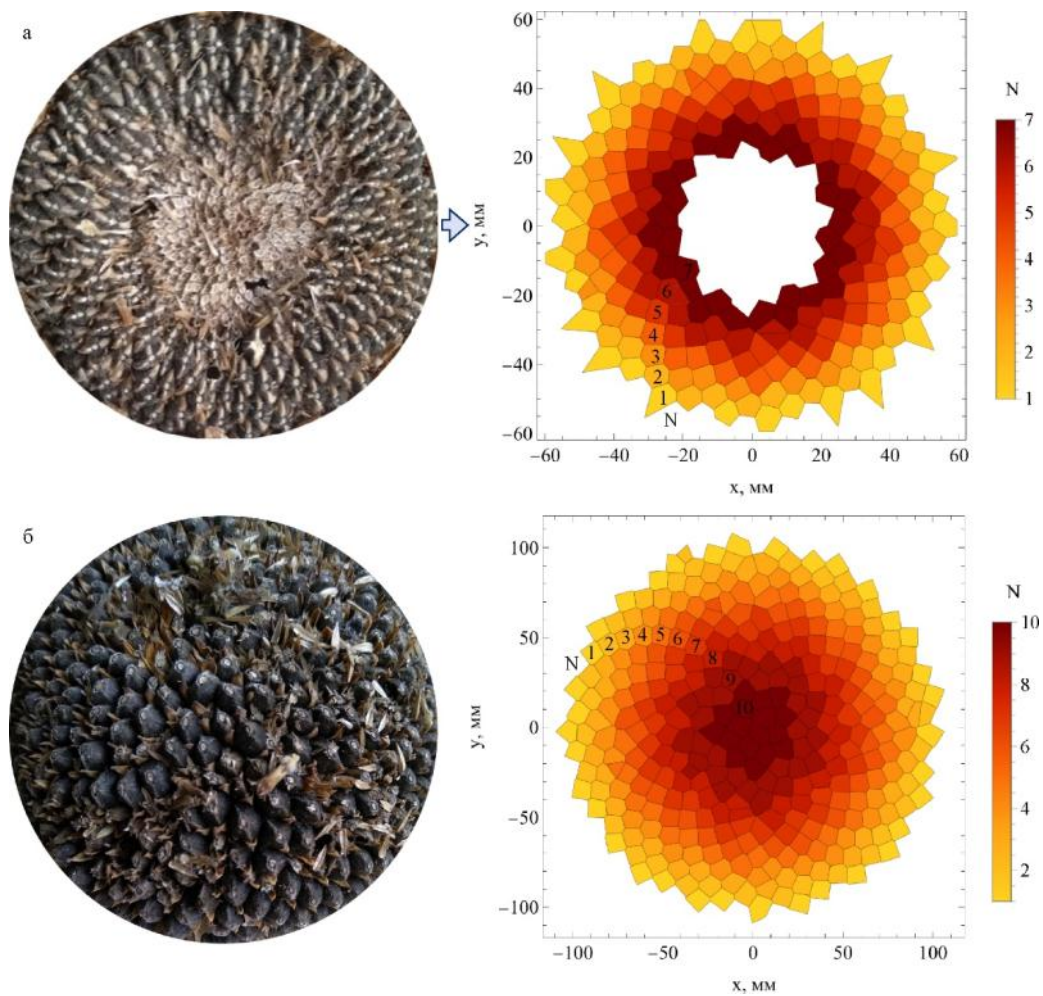
**Результати досліджень та їхнє обговорення.** У результаті обробки даних отримані розподіли насіння в кошику для всіх зразків. Їх приклади наведені на рисунку 4.

Данні зведено у загальну таблицю 1, розраховані середні значення і статистичні відхилення від них кожної фенотипової характеристики.



**Результати визначення фенотипових характеристик соняшнику різних зразків**

Зразок	Діаметр кошику $D_{sh}$ , см $\pm$ статистична похибка середнього	Насіння в ряду $N_r$ , шт. $\pm$ статистична похибка середнього	Кількість рядів $N_r$ , шт. $\pm$ статистична похибка середнього
КП11А	19,2 $\pm$ 0,9	21,0 $\pm$ 1,0	55,0 $\pm$ 1,0
КП11Б	16,9 $\pm$ 0,7	19,3 $\pm$ 1,2	54,7 $\pm$ 1,5
178a $\times$ 238p4	7,1 $\pm$ 0,2	19,3 $\pm$ 0,6	34,3 $\pm$ 2,1
178a $\times$ 238p2	6,8 $\pm$ 0,5	14,3 $\pm$ 1,2	33,7 $\pm$ 1,5
178a $\times$ 238p1	6,7 $\pm$ 0,5	10,3 $\pm$ 0,6	54,3 $\pm$ 0,6
174д	6,5 $\pm$ 0,3	7,3 $\pm$ 0,6	35,0 $\pm$ 1,7
165Вр1	13,7 $\pm$ 0,5	16,7 $\pm$ 1,2	55,0 $\pm$ 2,6



**Рис. 4. Розподіли насіння в кошику для зразків 165Вр1 (а) і КП11А (б)**

Аналіз таблиці 1 показує, що значення кількості рядів складає в середньому для всіх зразків 34 і 55. Ці значення відповідають послідовності Фібоначчі, що підтверджує дослідження (Swinton et al. 2016). Розрахувавши загальну кількість насінин  $N_s = N_r \times N$  отримуємо відповідні графіки залежності діаметра кошику для двох значень кількості рядів (рис. 5). Такі залежності мають лінійний характер, що дозволяє висунути гіпотезу про кореляцію діаметра кошику соняшнику від загальної кількості насіння для відповідного значення кількості рядів. Дана гіпотеза потребує перевірки на більшій кількості зразків.

Провівши порівняння фактичних розподілів насінин у кошику із теоретичними розподілами при розташуванні насіння за різними типами спіралей розраховали значення коефіцієнта кореляції Пірсона, які зведені в таблицю 2.

Таблиця 2

**Результати порівняння фактичних розподілів насінин у кошику із теоретичними розподілами при розташуванні насіння за різними типами спіралей у вигляді коефіцієнту кореляції Пірсона**

Зразок	Спіраль Архімеда	Евольвента	Спіраль Ферма
КП11А	0,56	0,51	0,89
КП11Б	0,43	0,49	0,79
178a×238p4	0,41	0,43	0,77
178a×238p2	0,46	0,42	0,82
178a×238p1	0,43	0,40	0,81
174д	0,51	0,49	0,82
165Вр1	0,37	0,33	0,73

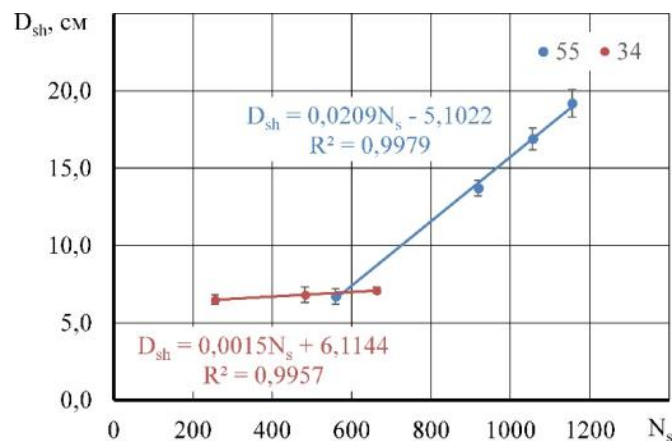


Рис. 5. Залежність діаметра кошику  $D_{sh}$  від загальної кількості насіння  $N_s$  для відповідного значення кількості рядів  $N$

Аналіз таблиці 2 дає змогу стверджувати, що найбільш високий коефіцієнт кореляції спостерігається для спіралі Ферма. Тому в подальших дослідженнях будемо використовувати формулу (5). Подальші дослідження будуть зосереджені на аналізі розподілу фенотипових характеристик насіння (геометричні розміри (L, W, T), маса насіння ( $M_s$ ), маса ядра ( $M_k$ ), сила міцності лущиння (F), щільність ( $\rho_s$ )) в кошику різних генотипів.

**Висновки.** Розроблена методика обробки фотозображення кошику соняшнику і визначення координат розміщення насіння в ньому.

В результаті досліджень підтверджений зв'язок послідовності Фібоначчі із розміщенням насіння в кошику соняшнику. Найбільш поширена кількість рядів насіння відповідає значенням 34 і 55.

Висунута гіпотеза щодо лінійної залежності діаметра кошику соняшнику від загальної кількості насіння для відповідного значення кількості рядів. Дана гіпотеза потребує перевірки на більшій кількості зразків.

Провівши порівняння отриманих розподілів насіння у кошику із різними типами спіралей (спіраль Архімеда, евольвента, спіраль Ферма) розраховані значення коефіцієнта кореляції Пірсона для різних зразків (КП11А, КП11Б, 178а×238р4, 178а×238р2, 178а×238р1, 174д, 165Вр1). Встановлено, що найбільш високий коефіцієнт кореляції спостерігається для спіралі Ферма (середнє значення – 0,8).

### **References**

Aliiev E. B. Automatic phenotyping of sunflower seed material: monograph. Kyiv: Agrarian science. 2022. 104 p. ISBN 978-966-540-540-5

Nosal O., Vedmedieva K., Maclyak K., Leonova N. Economic evaluation of large-seeded hybrids of sunflower. Scientific and technical bulletin of the Institute of oilseed crops NAAS. 2018. 25: 83–95. [http://bulletin.imk.zp.ua/pdf/2018/25/Nosal\\_25.pdf](http://bulletin.imk.zp.ua/pdf/2018/25/Nosal_25.pdf)

Kutishcheva N., Odinets S., Shudrya L., Sereda V., Bezsusid A. Effect of weather factors on the variability of economic characteristics in sunflower hybrids. Scientific and technical bulletin of the Institute of oilseed crops NAAS. 2019. 28: 70–84. DOI: 10.36710/IOC-2019-28-08

Polyakov O., Nikitenko O., Litoshko S. Formation of sunflower productivity under influence of additional nutrition by various basic soil cultivation methods. Scientific and technical bulletin of the Institute of oilseed crops NAAS. 2017. 24: 188–197. [http://bulletin.imk.zp.ua/pdf/2017/24/Polyakov2\\_24.pdf](http://bulletin.imk.zp.ua/pdf/2017/24/Polyakov2_24.pdf)

Polyakov O., Shcherbak A. Productivity of sunflower under the influence of mineral fertilizers and growth regulators. Scientific and technical bulletin of the Institute of oilseed crops NAAS. 2022. 33: 111–122. DOI: 10.36710/IOC-2022-33-11

Swinton J., Ochu E., The MSI Turing's Sunflower Consortium. Novel Fibonacci and non-Fibonacci structure in the sunflower: results of a citizen science experiment. R. Soc. open sci. 2016. 3: 160091. DOI: 10.1098/rsos.160091

Swinton J. Watching the Daisies Grow: Turing and Fibonacci Phyllotaxis. Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker. 2004. 477-498. DOI: 10.1007/978-3-662-05642-4\_20

Hudson Tiner J. Exploring the World of Mathematics: From Ancient Record Keeping to the Latest Advances in Computers. New Leaf Publishing Group. 2004. 157 p. ISBN 978-1-61458-155-0

Arakelyan G. Mathematics and the history of the golden section. Logos, 2014. 404 p. ISBN 978-5-98704-663-0

Weisse A. Die Zahl der Randblüthen an Compositenköpfchen in ihrer Beziehung zur Blattstellung und Ernährung. J. Wiss. Botanik. 1897. 30: 453–483.

Schoute J.C. On whorled phyllotaxis. IV. Early binding whorls. Recueil des Travaux Botaniques Néerlandais. 1938. 35: 415–558



Ryan G.W., Rouse J., Bursill L. Quantitative analysis of sunflower seed packing. *J. Theor. Biol.* 1990. 147: 303–328. DOI: 10.1016/S0022-5193(05)80490-4

Sadoc J.-F., Rivier N., Charvolin J.J. Phyllotaxis: a non-conventional crystalline solution to packing efficiency in situations with radial symmetry. *Acta Cryst.* 2012. A68: 470–483. DOI: 10.1107/S0108767312018910

Borda A., Bowen J.P. Turing's Sunflowers: Public research and the role of museums. Published by BCS Learning and Development Ltd. Proceedings of EVA London. 2020. 8 p. DOI: 10.31235/osf.io/mvjhf

## MATHEMATICAL MODEL OF PLACEMENT OF SUNFLOWER SEEDS IN A HEAD

E. Aliiev<sup>1,2</sup>, K. Vedmedieva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Oilseed Crops N National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine,*

<sup>2</sup> *Dnipro State Agrarian and Economic University*

Breeders, agronomists and agricultural technicians pay a lot of attention to the diameter of the sunflower head and the mass of seeds collected from it. Researchers position these indicators as productivity elements that have a direct impact on productivity. However, in research, almost no attention is paid to the placement of individual seeds in the sunflower head.

Existing mathematical models are satisfactory in that they can explain high Fibonacci numbers based on a small number of plausible assumptions, although they are less satisfactory to experimental scientists. Despite increasingly detailed genetic, physiological, and biophysical understanding of the arrangement of plant organs, the very legibility and commonality of mathematical explanations make it difficult to generate and test experimental hypotheses. Controversy remains about the appropriate choice of mathematical models and whether they should be central to our understanding of plant physiological development. The mathematical model of the placement of seeds in a sunflower head makes it possible to investigate the influence of their large-fruitedness competition among themselves on the overall productivity.

A method of processing a photo image of a sunflower head and determining the coordinates of seed placement in it has been developed. As a result of research, the connection of the Fibonacci sequence with the placement of seeds in the sunflower basket has been confirmed. The most common number of rows of seeds corresponds to the values of 34 and 55. A hypothesis is put forward regarding the linear dependence of the diameter of the sunflower head on the total number of seeds for the corresponding value of the number of rows. This hypothesis needs to be tested on a larger number of variety samples.

After comparing the obtained seed distributions in the head with different types of spirals (classical Archimedean spiral, involute, Fermat spiral), the values of the Pearson correlation coefficient were calculated for different variety samples (KP11A, KP11B, 178a×238r4, 178a×238r2, 178a×238r1, 174d, 165Br1). It was established that the highest correlation coefficient is observed for the Fermat spiral (average value – 0.8).

**Key words:** sunflower, head, seed, placement, distribution, spiral, Fibonacci sequence, Fermat spiral.